الـــمـــلـــحـــق 1

الأبجدية اليونانية

النطق Prononciation	حروف مطبعية Majuscule	حروف صغيرة miniscule
Alpha	Α	α
Bêta	Β	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	Ε	ε
dzêta	Ζ	ζ
éta	Η	η
thêta	Θ	θ
iota	Ι	ι
kappa	Κ	κ
lambda	Λ	λ
mu	Μ	μ
nu	Ν	ν
xi	Ξ	ξ
oméga	Ω	ω
omicron	Ο	ο
pi	Π	π
rhô	Ρ	ρ
sigma	Σ	σ
tau	Τ	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	φ
Khi خي	Χ	χ
psi	Ψ	ψ

الــمــلــحــق 2

التدرج، التباعد، الدوران و لابلاسيان في مختلف الإحداثيات (الكارتيزية، الأسطوانية و الكروية)

لتكن:

F : دالة سلمية

$\vec{V}$: دالة شعاعية

تدرج دالة سلمية في الإحداثيات:

الكارتيزية: $F = F(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right]$$

الأسطوانية: $F = F(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right]$$

الكروية: $F = F(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{grad}F = \vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}\right]$$

تدرج دالة شعاعية في الإحداثيات:

الكارتيزية: $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z)$ ، $V_x = V_x(x,y,z), V_y = V_y(x,y,z), V_z = V_z(x,y,z)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

الأسطوانية: $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,z)$ ، $V_r = V_r(r,\theta,z), V_\theta = V_\theta(r,\theta,z), V_z = V_z(r,\theta,z)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(V_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

الكروية: $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,\varphi)$ ، $V_r = V_r(r,\theta,\varphi), V_\theta = V_\theta(r,\theta,\varphi), V_\varphi = V_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}\left[\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r}V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cos\theta.V_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

دوران دالة شعاعية في الإحداثيات:

الكارتيزية: $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z)$ ، $V_x = V_x(x,y,z), V_y = V_y(x,y,z), V_z = V_z(x,y,z)$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V}\left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

الأسطوانية: $\vec{V}=\vec{V}(r,\theta,z)$، $V_r=V_r(r,\theta,z),V_\theta=V_\theta(r,\theta,z),V_z=V_z(r,\theta,z)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\left[\frac{\left(\frac{\partial V_z}{\partial\theta}-r\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)}{r}\overrightarrow{u_r}+\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta}+\frac{V_\theta+r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}}{r}\overrightarrow{u_z}\right]$$

الكروية: $\vec{V}=\vec{V}(r,\theta,\varphi)$، $V_r=V_r(r,\theta,\varphi),V_\theta=V_\theta(r,\theta,\varphi),V_\varphi=V_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\left[\frac{r\cos\theta.V_\varphi+r\sin\theta\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial\theta}\right)-r\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)}{r^2\sin\theta}\overrightarrow{u_r}+\right.$$

$$\left.\frac{\left(\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right)-\sin\theta V_\varphi-r\sin\theta\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\right)}{r\sin\theta}\overrightarrow{u_\theta}+\frac{V_\theta+r\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)}{r}\overrightarrow{u_\varphi}\right]$$

<u>لابلاسيان دالة سلمية في الإحداثيات:</u>

الكارتيزية: $F=F(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F)=\vec{\nabla}^2(F)=\left[\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}\right]$$

الأسطوانية: $F=F(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F)=\vec{\nabla}^2(F)=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}$$

الكروية: $F=F(r,\theta,\varphi)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F)=\vec{\nabla}^2(F)=\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cos\theta.\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}$$

<u>لابلاسيان دالة شاعية في الإحداثيات:</u>

الكارتيزية: $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z)$، $V_x=V_x(x,y,z),V_y=V_y(x,y,z),V_z=V_z(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2\left(\vec{V}\right)=\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\vec{j}+$$

$$\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

الأسطوانية: $\vec{V}=\vec{V}\left(r,\theta,z\right)$ ، $V_r=V_r\left(r,\theta,z\right),V_\theta=V_\theta\left(r,\theta,z\right),V_z=V_z\left(r,\theta,z\right)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}=\vec{\nabla}^2.\vec{V}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_r$$

$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_\theta$$

$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_z$$

الكروية: $\vec{V}=\vec{V}\left(r,\theta,\varphi\right)$ ، $V_r=V_r\left(r,\theta,\varphi\right),V_\theta=V_\theta\left(r,\theta,\varphi\right),V_\varphi=V_\varphi\left(r,\theta,\varphi\right)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2(\vec{V})=\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_r$$

$$+\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_\theta$$

$$+\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_\varphi$$

تدرج شعاع (مصفوفة3*3):

$\vec{V}=\vec{V}\left(x,y,z\right)$ ، $V_x=V_x\left(x,y,z\right),V_y=V_y\left(x,y,z\right),V_z=V_z\left(x,y,z\right)$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z}\\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z}\\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z}\end{bmatrix}$$

الـــمـــلـــحـــق 3

قواعد الاشتقاقات

1/ أهم القواعد لحساب المشتقات.

إذا كان c ثابت و $u=\varphi(x)$ ، $v=\psi(x)$ دالتان لها مشتقات فإن:

$1/(c)'=0$ $\quad$ $2/(x)'=1$ $\quad$ $3/(u\pm v)'=u'\pm v'$

$4/(cu)'=cu'$ $\quad$ $5/(uv)'=u'v+v'u$ $\quad$ $6/\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-v'u}{v^2}$

$7/\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{-cv}{v^2}$

2/ جدول مشتقات الدوال الرئيسية.

$1/(x^n)'=nx^{n-1}$ $\quad$ $2/(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $3/(\sin x)'=\cos x$

$4/\ (\cos x)'=-\sin x$ $\quad$ $5/\ (tx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad$ $6/\ (c\tan x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$

$7/(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ (|x|\prec 1)$ $\quad$ $8/\ (\arccos xx)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ (|x|\prec 1)$

$9/\ (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $10/\ (arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

$11/\ (a^x)'=a^x\ln x$ $\quad$ $12/\ (e^x)'=e^x$

$13/\ (\ln x)'=\frac{1}{x}\ \ (x\succ 0)$ $\quad$ $14/\ (\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}\ \ (x\succ 0, a\succ 0)$

$15/\ (shx)'=chx$ $\quad$ $16/\ (chx)'=shx$

$17/\ (thx)'=\frac{1}{ch^2x}$ $\quad$ $18/\ (cthx)'=\frac{-1}{sh^2x}$

$19/\ (Arshx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ $20/\ (Archx)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ \ (|x|\succ 1)$

$21/\ (Arthx)'=\frac{1}{1-x^2}\ \ (|x|\prec 1)$ $\quad$ $22/\ (Arcthx)'=\frac{-1}{x^2-1}\ \ (|x|\succ 1)$

3/ قواعد اشتقاق الدوال المركبة.

إذا كان $y=f(u)$ و $u=\varphi(x)$ أي $y=f\left[\varphi(x)\right]$ و حيث y و u لهما مشتقات ، فإن:

$y'_x = y'_u u'_x$ أو باستعمال رمز ليبنيتز $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

الـــمـــلـــحـــق 4

الملحق4

قواعد التكاملات

1/ أهم قواعد التكامل.

ا/ إذا كان $F'(x)=f(x)$ فإن: $\int f(x)dx=F(x)+C$ حيث C ثابت عشوائي.

ب/ $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$ حيث A ثابت.

ج/ $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$

د/ إذا كان $\int f(x)dx=F(x)+C$ و $u=\varphi(x)$ فإن $\int f(u)du=F(u)+C$

و بالخصوص، $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ علما أن $(a\neq 0)$

2/ جدول تكاملات نموذجية.

$$I/\int x^n dx=\frac{x^{n-1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$$

$$II/\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$$

$$III/\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}arc\cot\frac{x}{a}+C\quad(a\neq 0)$$

$$V/\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{a-x}\right|+C\quad(a\neq 0)$$

$$VI/\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$$

$$VI/\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{-x}{a}+C\quad(a\succ 0)$$

$$VII/\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad(a\succ 0)\ ;\ \int e^x dx=e^x+C$$

$$VIII/\int sinxdx=-cosx+C$$

$$IX/\int cosxdx=\sin x+C$$

$$XIII/\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln|\tan x+\sec x|+C$$

$$XIV/\int shxdx=chx+C$$

$$XV/\ \int chxdx = shx + C$$

$$XVI/\ \int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C$$

$$XVII/\ \int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$$

3/ طريقة الاستبدال.

ا/ استبدال المتغير في تكامل غير محدد:

نضع $x=\varphi(t)$ حيث t متغير جديد و φ دالة مستمرة قابلة للاشتقاق ، يكون:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

نحرص على اختيار الدالة φ بحيث يكون للطرف الثاني في العبارة (1) شكل بسيط التكامل.

ب/ الاستبدال المثلثي:

☜إذا كان التكامل يحتوي على الجذر $\sqrt{a^2-x^2}$ ، نضع عموما $x=a\sin t$ و منه $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$.

☜إذا كان التكامل يحتوي على الجذر $\sqrt{x^2-a^2}$ ، نضع عموما $x=a\sec t$ و منه $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$.

☜إذا كان التكامل يحتوي على الجذر $\sqrt{x^2+a^2}$ ، نضع عموما $x=a\tan t$ و منه $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$

4/ التكامل بالأجزاء:

إذا كانت $u=\varphi(x)$ و $v=\psi(x)$ دالتان قابلتين للاشتقاق يكون :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

الــمـــلـــحـــق 5

بعض المعادلات التفاضلية

لتكن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية: $y''+ay'+by=c$ ، a ، b و c ثوابت.

الحالة الأولى: $a=0,c=0 \Rightarrow y''+by=0$

إذا كانت $b=0$ الحل هو: $y=C_1x+C_2$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل تحدّدهما الشروط الإبتدائية.

إذا كانت $b \succ 0$ الحل هو: $y=C_1\sin\sqrt{b}x+C_2\cos\sqrt{b}x$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

إذا كانت $b \prec 0$ الحل هو: $y=C_1\exp\left(\sqrt{b}x\right)+C_2\exp\left(-\sqrt{b}x\right)$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

الحالة الثانية: $a\neq 0,c=0 \Rightarrow y''+ay'+by=0$

المعادلة المميزة هي $r^2+ar+b=0$ ، مميزها: $\Delta=a^2-4b$ و جذراه $_1$ و $_2$:

إذا كان $\Delta \succ 0$ فإن الحل هو: $y=C_1\exp(r_1x)+C_2\exp(r_2x)$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

إذا كان $\Delta=0$ فإن $r_1=r_2=r_0$ و الحل هو: $y=(C_1x+C_2)\exp(r_0x)$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

إذا كان $\Delta \prec 0$ فإن $r_{1,2}$ عددان خياليان $r_{1,2}=\alpha+i\beta$ و الحل هو: $y=\exp(\alpha x)[C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x]$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

الحالة الثالثة: $y''=0,c=0 \Rightarrow ay'+by=0$ تصبح المعادلة من الدرجة الأولى و الحل هو: $y=C\exp\left(-\frac{b}{a}x\right)$ ، C ثابت التفاضل تحدّده الشروط الإبتدائية.

الحالة الرابعة: $y''=0 \Rightarrow ay'+by=c$

تصبح المعادلة من الدرجة الأولى و الحل هو: $y = C\exp\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+\frac{c}{b}$ ، C ثابت التفاضل تحدّده الشروط الإبتدائية.

<u>الحالة الخامسة:</u> $\boxed{y' = 0 \Rightarrow y''+by = c}$ ، الحل هو:

$$y = C_1\exp\left(\sqrt{\frac{b}{c}}x\right)+C_2\exp\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}x\right)+\frac{c}{b}$$

الملحق 6

جدول التحويلات المثلثية

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ $\sin^2\alpha=\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ $\sin 2a=2\sin a\cos a$ $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$	$1+\cos a=2\cos^2\dfrac{a}{2}$ $1-\cos a=2\sin^2\dfrac{a}{2}$ $\sin a=2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$ $\cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\quad\left(t=\tan\dfrac{a}{2}\right)$ $\sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$	$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$